1.16 Théorème de Lax-Milgram et application à la résolution d'équations elliptiques (205, 208, 213) [4], [5], [20], [21]

Le cadre fonctionnel le plus adapté pour résoudre des équations elliptiques (Poisson, Laplace, etc.) est les espaces de Hilbert $H^1(\Omega)$ ou $H^1_0(\Omega)$ si on regarde des conitions aux bords de Dirichlet. En effet, les espaces de fonctions régulières, $\mathscr{C}^1$ par exemple, ont le défaut de ne pas être complets, ce qui a motivé la définition de ces espaces de Sobolev, qui se sont imposés comme **le** cadre fonctionnel adéquat pour résoudre ces équations aux dérivées partielles, notamment en les interprétant comme des problèmes variationnels. C'est là qu'interviennent les théorèmes de Riesz mais également de Lax-Milgram ! Ils permettent d'affirmer l'existence et l'unicité d'une solution à ces problèmes variationnels ! Le théorème de Lax-Milgram étant une généralisation du théorème de Riesz :

Théorème 1.27 (Lax-Milgram)**.** Soient H un $\mathbb{R}$-espace de Hilbert, $\ell \in H'$ une forme linéaire continue sur H et $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue et coercive, coercive signifiant :

$$\exists \alpha > 0,\ \forall v \in H, \quad a(v,v) \geqslant \alpha \|v\|^2.$$

Alors il existe un unique vecteur $u \in H$ tel que :

$$\forall v \in H, \quad a(u,v) = \ell(v).$$

Démonstration. Il s'agit d'un énoncé proche de celui du théorème de Riesz. Il est donc naturel de vouloir l'utiliser.

Étape 1 : Définition d'un opérateur continu grâce au théorème de Riesz et problème à résoudre

Pour tout $u \in H$, l'application $a(u,\cdot)$ est linéaire et continue sur H par continuité de la forme bilinéaire a. Ainsi, par le théorème de Riesz, il existe un unique vecteur, noté $Au \in H$ tel que :

$$\forall v \in H, \quad a(u,v) = \langle Au, v\rangle.$$

Montrons que l'application $A : u \mapsto Au$ est un opérateur continu sur H.

— Linéarité : Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tous $u, u', v \in H$, on a :

$$\langle A(\lambda u + u'), v\rangle = a(\lambda u + u', v) = \lambda a(u,v) + a(u',v) = \lambda \langle Au, v\rangle + \langle Au', v\rangle = \langle \lambda Au + Au', v\rangle.$$

L'égalité étant vraie pour tout vecteur $v \in H$, on a donc :

$$\forall (\lambda, u, u') \in \mathbb{R} \times H^2, \quad A(\lambda u + u') = \lambda Au + Au'.$$

Ainsi, $A \in \mathscr{L}(H)$.

— Continuité : Notons M une constante de continuité de a. Pour tout $u \in H$, on a :

$$\|Au\|^2 = \langle Au, Au\rangle = a(u, Au) \leqslant M\|u\|\|Au\|.$$

Ainsi, pour tout u tel que $Au \neq 0$, on a :

$$\|Au\| \leqslant M|u\|.$$

Mais si $Au = 0$, l'inégalité ci-dessus est également valable ! Ainsi, $A \in \mathscr{L}_c(H)$.

Maintenant, en appliquant une nouvelle fois le théorème de Riesz à la forme linéaire continue ℓ, on obtient un unique vecteur $w \in H$ tel que :

$$\forall v \in H, \quad \langle w, v\rangle = \ell(v).$$

Il nous faut alors confirmer que l'équation $Au = w$ admet une unique solution.

Étape 2 : L'opérateur A est bijectif

— Injectivité : Par coercivité de a, on a :

$$\forall u \in H, \quad \langle Au, u\rangle = a(u,u) \geqslant \alpha \|u\|^2.$$

Ainsi, si $u \in H$ est tel que $Au = 0$, alors $\langle Au, u\rangle = 0$ et donc $u = 0$.

— Surjectivité : Pour montrer que A est surjective, on montre que $\mathrm{Im}(A)$ est fermée et dense dans H.

  — Densité : On utilise le critère de densité dans les Hilbert. Soit $v \in \mathrm{Im}(A)^{\perp}$. En particulier, $v \perp Av$. Ainsi :

$$0 = \langle Av, v\rangle \geqslant \alpha\|v\|^2.$$

  Ainsi, $v = 0$. $\mathrm{Im}(A)$ est donc dense dans H.

  — Fermeture : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Im}(A)^{\mathbb{N}}$ et soit $v \in H$ tel que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} v$. On pose $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ telle que $Ay_n = v_n$ pour tout n. Montrons que la suite (y_n) converge. Pour cela, on va utiliser la coercivité de a pour montrer qu'elle est de Cauchy :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, \quad \|y_m - y_n\|^2 \leqslant \frac{1}{\alpha} a(y_m - y_n, y_m - y_n) = \langle Ay_m - Ay_n, y_m - y_n\rangle \leqslant M\|v_n - v_m\|\|y_m - y_n\|.$$

  Ainsi :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad \|y_m - y_n\| \leqslant \frac{M}{\alpha}\|v_m - v_n\|.$$

  Ainsi, puisque (v_n) converge, elle est de Cauchy. Il en est donc de même pour (y_n). Par complétude de H, cette suite converge vers une limite, notée $y \in H$. Par continuité de H, on a donc que $Ay_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} Ay$ et par unicité de la limite, $Ay = v$ et donc $v \in \mathrm{Im}(A)$.

Ainsi, il existe un unique $u \in H$ tel que $Au = w$, et donc il existe un unique $u \in H$ tel que :

$$\forall v \in H, \quad a(u,v) = \langle Au, v\rangle = \langle w, v\rangle = \ell(v),$$

ce qui conclut ! □

On peut alors appliquer ce théorème pour déterminer l'existence et l'unicité de solutions d'équations elliptiques :

Théorème 1.28. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné, de bord $\partial\Omega$ $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Soient également $A \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}, \mathscr{S}_2(\mathbb{R}))$, $b \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, $c \in \mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{R})$ des fonctions telles que :

— A est symétrique définie positive uniformément en $x \in \Omega$, c'est-à-dire :

$$\exists \alpha > 0,\ \forall x \in \Omega,\ \forall v \in \mathbb{R}^2, \quad A(x)v \cdot v \geqslant \alpha\|v\|^2,$$

— b et c vérifient :

$$c - \frac{1}{2}\mathrm{div}(b) \geqslant 0, \quad \text{presque partout sur } \Omega.$$

Alors l'équation elliptique suivante :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A\nabla u) + b\cdot\nabla u + cu & = & f \quad \text{sur } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} & \equiv & 0 \end{cases}$$

admet une unique solution faible $u \in H^1_0(\Omega)$.

Démonstration. Trouvons la formulation variationnelle de ce problème de Dirichlet et justifions qu'elle possède une unique solution. On cherche donc $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega -\mathrm{div}(A\nabla u)v + \int_\Omega b \cdot \nabla uv + \int_\Omega cuv = \int_\Omega fv.$$

En appliquant la deuxième formule de Green à la première intégrale, on obtient :

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega b \cdot \nabla uv + \int_\Omega cuv = \int_\Omega fv.$$

En effet, $u \in H_0^1(\Omega)$, ainsi, le terme de bord apparaissant dans la formule de Green vaut 0. Posons alors a et ℓ comme suit :

$$\begin{array}{rcl} a \;:\; H_0^1(\Omega)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & \displaystyle\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega b \cdot \nabla uv + \int_\Omega cuv \end{array}$$

et :

$$\begin{array}{rcl} \ell \;:\; H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & \displaystyle\int_\Omega fv. \end{array}$$

On a :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad |\ell(v)| \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ainsi, ℓ est continue sur $H_0^1(\Omega)$. Également :

$$\begin{array}{rcl} \forall (u,v) \in H_0^1(\Omega), \quad |a(u,v)| & \leqslant & \|A\|_\infty \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|b\|_\infty \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|c\|_\infty \|u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}. \\ & \leqslant & (\|A\|_\infty + \|b\|_\infty + \|c\|_\infty)\, \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{array}$$

Ainsi, a est une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$. Montrons que a est coercive :

$$\begin{array}{rcl} \forall u \in H_0^1(\Omega), \quad a(u,u) & = & \displaystyle\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla u + \int_\Omega b \cdot \nabla uu + \int_\Omega cu^2 \\ & = & \alpha\|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \displaystyle\int_\Omega b \cdot (u\nabla u) + \int_\Omega cu^2. \end{array}$$

Or, $u\nabla u = \frac{1}{2}\nabla(u^2)$. Ainsi, en appliquant la première formule de Green à notre intégrale, on obtient :

$$a(u,u) \geqslant \alpha\|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \int_\Omega u^2 \underbrace{\left(c - \frac{1}{2}\mathrm{div}(b)\right)}_{\geqslant 0 \text{ p.p.}} \geqslant \alpha\|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

Là encore, on a utilisé le fait que $u \in H_0^1(\Omega)$ pour dire que le terme de bord de la formule de Green vaut 0. Maintenant, on peut utiliser l'inégalité de Poincaré : étant donné que Ω est borné, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \|v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leqslant C\|\nabla v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

Ainsi :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \quad a(u,u) \geqslant \frac{\alpha}{2}\left(\|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{C^2}\|u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\right) \geqslant \frac{\alpha}{2}\min\left(1, \frac{1}{C^2}\right)\|u\|^2_{H^1}.$$

Ainsi, la forme bilinéaire a est coercive sur $H_0^1(\Omega)$. Ainsi, d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe une unique solution faible au problème de Dirichlet de l'énoncé ! □

Remarque 1.16.1. *Je me suis placé dans $\mathbb{R}^2$ pour cet énoncé car la formule de Green s'y énonce plus facilement, tout comme la définition d'ouvert de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. De plus, cela permet d'éviter les remontrances des fans de Brézis qui savent qu'en dimension 1, on peut se ramener à la fameuse équation $-(pu')' + qu = f$ qui peut se résoudre juste avec le théorème de Riesz, ce qui rend l'application de Lax-Milgram invalide.*